DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT 1 9 8 1

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NATIONALE
DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

M A T H E M A T I Q U E S

2ème épreuve commune aux options M et P

Durée : 4 heures

Le problème se compose de deux parties pouvant être résolues séparément. L'espace réel E dont il est question est de dimension n, où n est au moins égal à 3.

On rappelle qu'un projecteur sur E est un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que :

(1) $u \circ u = u$

et qu'il possède les propriétés

(2) $\mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Im}\,(u) = E$

(3) si $x = x_1 + x_2$, avec (x_1, x_2) dans $\mathrm{Ker}\,(u) \times \mathrm{Im}\,(u)$, alors $u(x) = x_2$

On désigne par " spectre d'un endomorphisme " l'ensemble de ses valeurs propres.

On donne deux projecteurs p et q sur E tels que

i) $p \neq 0 \quad q \neq 0 \quad q \neq e \quad p \neq e \quad p + q \neq e$

où 0 et e sont les endomorphismes de E tels que :

$\forall x,\ x \in E, \quad 0(x) = 0 \quad$ et $\quad e(x) = x.$

ii) $p \circ q = q \circ p$

On pose :

$f = p + q$, $\varphi = p \circ q = q \circ p$, $f^0 = e$, $f^1 = f$

et pour tout entier k naturel strictement positif,

$$f^{k+1} = f^k \circ f.$$

I

1 - vérifier que φ est un projecteur. Démontrer que le spectre de f est inclus dans $\{ 0, 1, 2 \}$

2 - trouver une relation liant les noyaux Ker (p) et Ker (q) de p et q, équivalente à la proposition " 0 est valeur propre de f "

3 - trouver une relation liant les images Im (p) et Im (q) de p et q équivalente à la proposition " 2 est valeur propre de f ".

4 - démontrer que lorsque 2 (respectivement 0) n'est pas valeur propre de f, alors 1 est ~~la~~ valeur propre de f.

5 - démontrer que le spectre de f ne peut être $\{ 1 \}$

Nous savons maintenant que ce spectre est l'un des ensembles $\{ 0,1 \}$, $\{ 1,2 \}$, $\{ 0,1, 2 \}$, $\{ 0,2 \}$. Montrer par des exemples simples que chacune de ces éventualités peut être réalisée. Lorsque le spectre est $\{ 0,1 \}$, f est-il un projecteur ?

II

On suppose dans cette partie que le spectre de f est $\{ 0, 1, 2 \}$, et on se propose d'étudier l'application Φ de l'ensemble $\mathbb{R}(X)$ des polynômes à une indéterminée dans l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ définie par :

$$\text{Si } A = \sum_0^n a_p \chi^p \text{ , alors } \Phi(A) = \sum_0^n a_p f^p$$

L'image de Φ est notée $\mathbb{R}(f)$

L'image par Φ de A est notée $A(f)$.

1 - Montrer rapidement que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}(\chi)$ dans $\mathcal{L}(E)$ et un morphisme d'algèbre.

2 - Déterminer :

a) f^k en fonction de f et de φ, pour $k \geqslant 2$

b) le noyau de φ, la dimension et une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}(f)$

c) une base $\{ u_0, u_1, u_2 \}$ de $\mathbb{R}(f)$ telle que, $\forall A$

$A \in \mathbb{R}(\chi)$, on ait :

$A(f) = A(0)\ u_0 + A(1)\ u_1 + A(2)\ u_2$.

Déterminer des polynômes dont les images par φ sont respectivement u_0, u_1, u_2, et en déduire les produits $u_0 \circ u_1$, $u_0 \circ u_2$, $u_1 \circ u_2$.

3 - Démontrer que le spectre de A (f) contient au plus trois nombres, déterminer ce spectre, en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A (f) soit inversible, exprimée à l'aide du polynôme A (f).

4 - Déterminer les éléments de $\mathbb{R}(f)$ inversibles dans $\mathbb{R}(f)$. Existe-t-il des éléments de $\mathbb{R}(f)$ inversibles dans $\mathcal{L}(E)$ et non dans $\mathbb{R}(f)$?

5 - Déterminer une condition nécessaire sur A pour que A (f) soit un projecteur. Vérifier qu'elle est suffisante. Donner en extension l'ensemble P des projecteurs sur E éléments de $\mathbb{R}(f)$. Le cardinal de P est 8. (compter O et e) Situer u_0, u_1, u_2 par rapport à P.

6 - Les résultats obtenus incitent à penser que, peut-être, f est diagonalisable. Démontrer que c'est effectivement le cas (par exemple on pourra utiliser les résultats du II - 2 - c, ou bien exploiter l'hypothèse p o q = q o p.)

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail